

# Mécanique du contact - frottement - usure

## I - Introduction

## II - Contact ponctuel

II.1 Cinématique du contact ponctuel

II.2 Efforts transmis au contact - loi de Coulomb

II.3 Conclusion : critères de dimensionnement

## III - Éléments de la théorie de Hertz -1881 : Contact ponctuel et linéique

III.1 Hypothèses

III.2 Modélisation des déformations, zone de contact

III.3 Répartition de pression

III.4 Contact sphérique : géométrie du contact, pression, critère de dimensionnement

III.5 Contact linéique : géométrie du contact, pression, critère de dimensionnement

III.6 Tableau récapitulatif

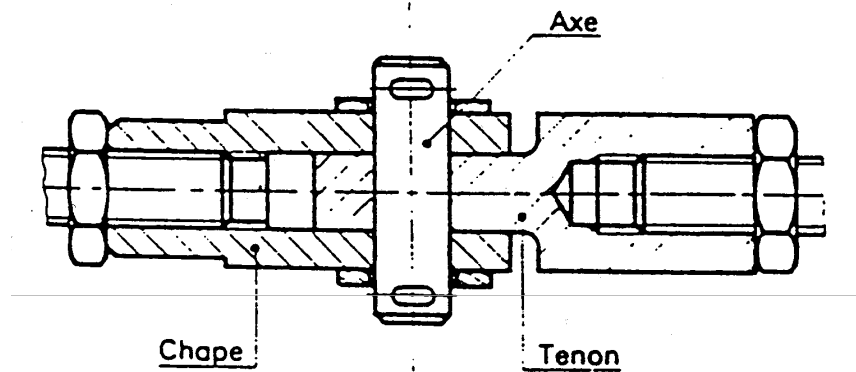
III.7 Quelques applications

## IV - Contact surfacique : Surface de contact? Modélisation de la répartition de pression ?

## V – Frottement, usure, lubrification : Notions de tribologie, Mécanismes et conséquences

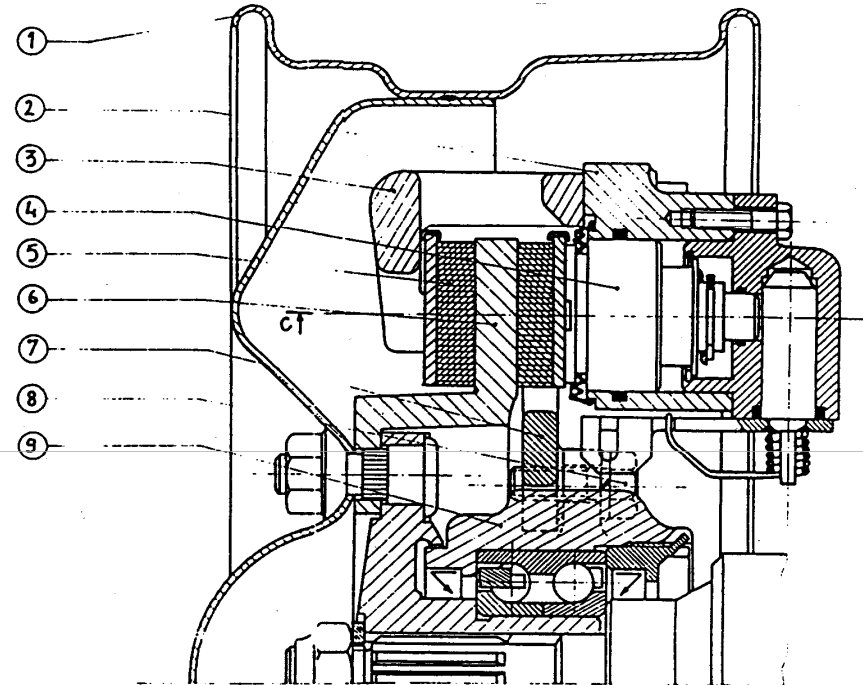
# I - Introduction

## Exemple 1 : liaison pivot (articulation)



Pb : Quelles dimensions donner à l'articulation?  
Quels matériaux choisir?  
...

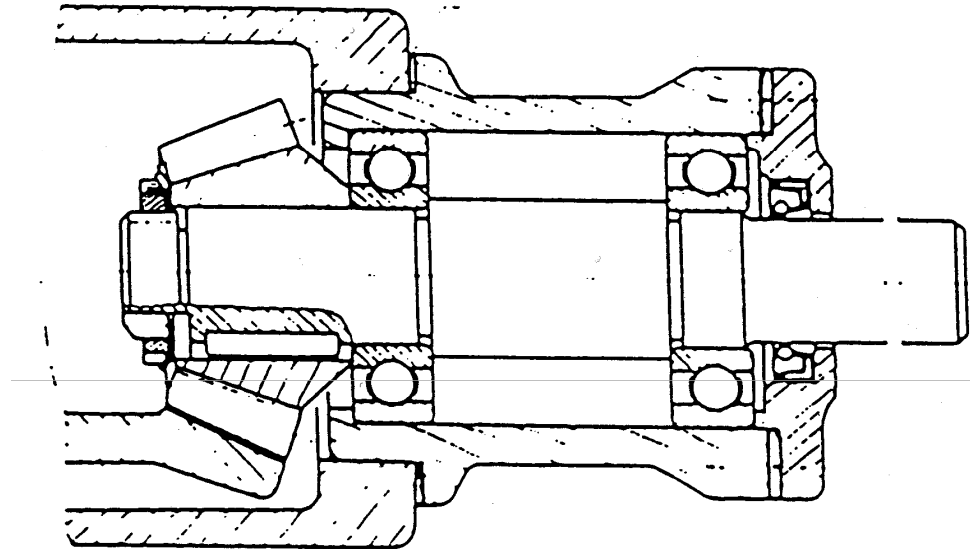
## Exemple 2 : frein à disque



Pb : Quelles dimensions donner aux surfaces de freinage?  
Quels matériaux choisir?  
Quelle est la force nécessaire au freinage?  
...

**Exemple 3** : liaison pivot par éléments roulants

(doc SKF)

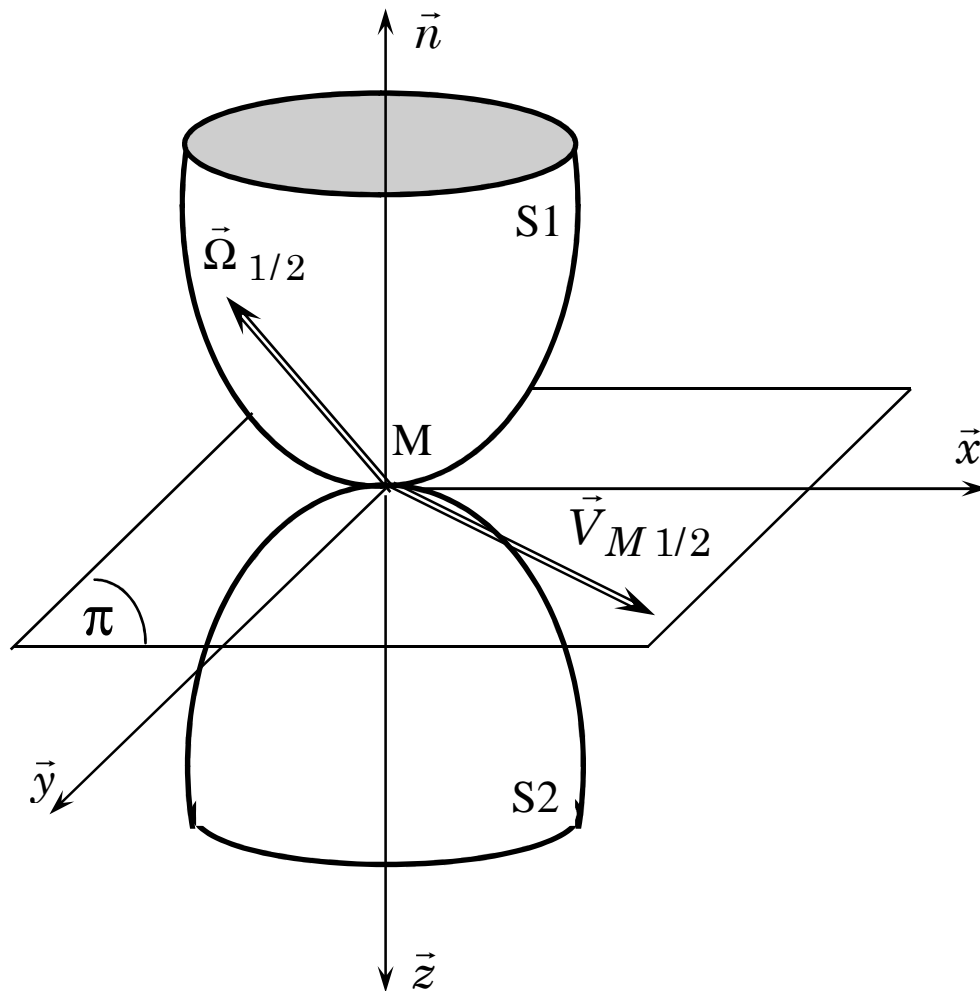


- Pb : Quelle est la rigidité de la liaison ainsi réalisée?  
Est-ce une liaison pivot ou une pivot glissant?  
Quelles sont les conséquences sur la durée de vie de la liaison?  
...

## II - Contact ponctuel

### II.1 Cinématique du contact ponctuel

- M : point de contact entre S1 et S2
- $\pi$  : plan tangent au contact
- $\vec{n}$  : normale au contact

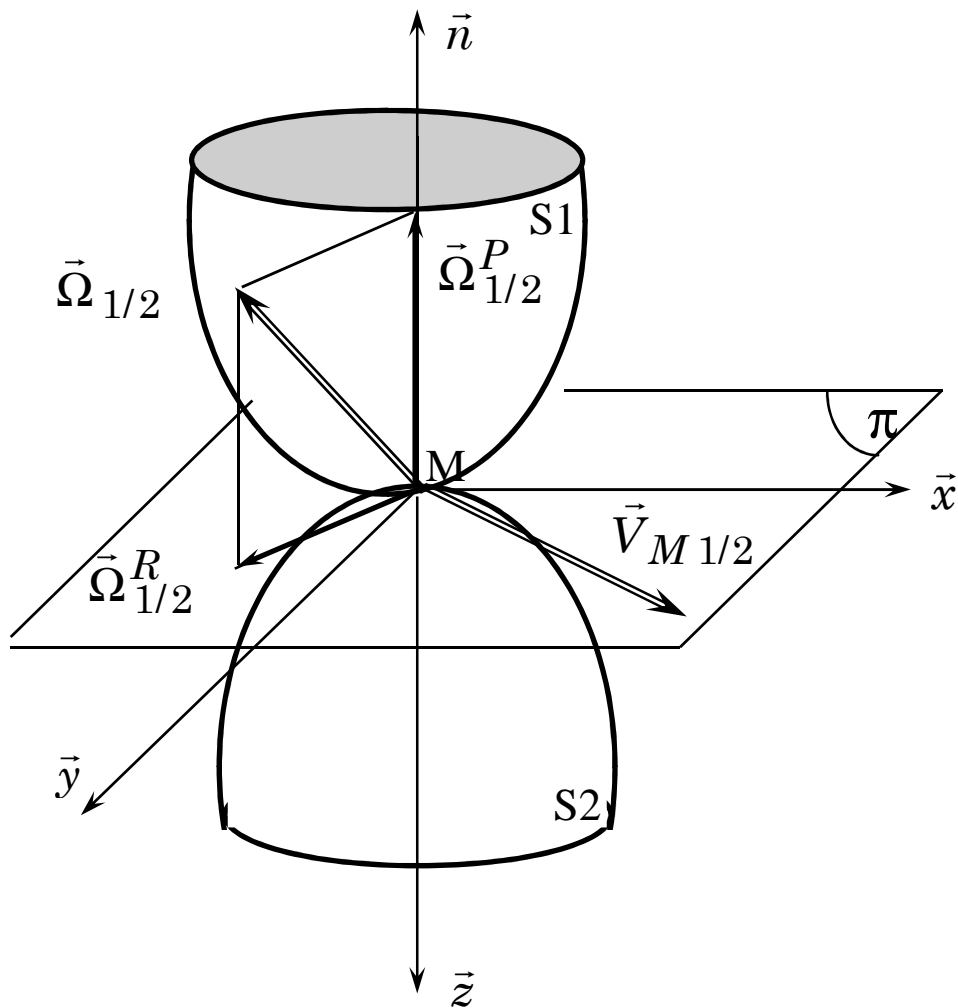


Mouvement relatif de S1 par rapport à S2

$$\vec{V}_{M 1/2} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{1/2}$$

$$\{V_{1/2}\}_{M_{xyz}} : \begin{Bmatrix} \Omega_{x1/2} & V_{x1/2} \\ \Omega_{y1/2} & V_{y1/2} \\ \Omega_{z1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{M_{xyz}}$$

Condition nécessaire au maintien du contact



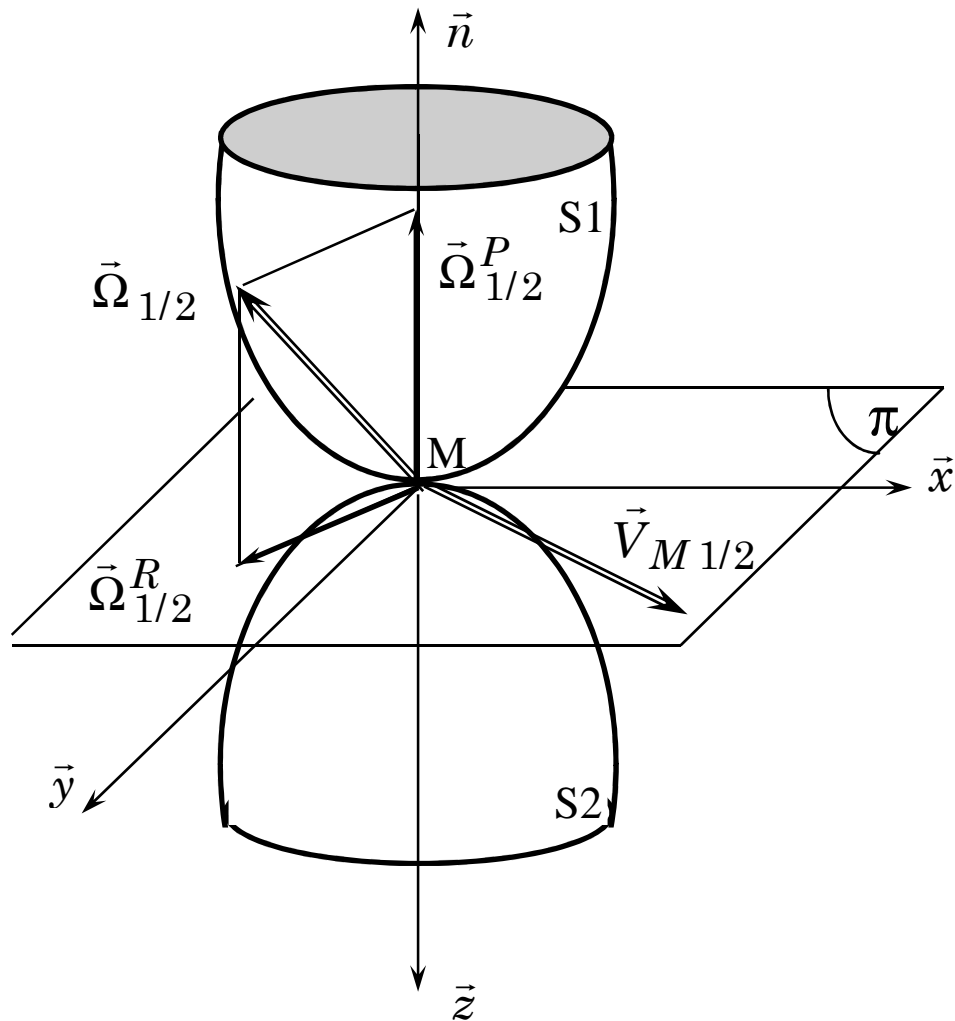
$\vec{V}_{M\ 1/2}$  : **Vitesse de glissement en M**  
de S1 / S2  
Contenue dans le plan tangent

$\vec{\Omega}_{1/2}$  : **Taux de rotation** de S1 / S2

$$\vec{\Omega}_{1/2} = \vec{\Omega}_{1/2}^P + \vec{\Omega}_{1/2}^R$$

Projection suivant  $\vec{n}$   
Taux de rotation  
**de pivotement**  
(Spin)

Projection sur  $\pi$   
Taux de rotation  
**de roulement**



Conclusion :

☆ Si  $\vec{\Omega}_{1/2}^P \neq \vec{0}$ ,  $\vec{\Omega}_{1/2}^R \neq \vec{0}$  et  $\vec{V}_{M1/2} \neq \vec{0}$

*S1 pivote, roule et glisse  
par rapport à S2*

⌚ Si  $\vec{\Omega}_{1/2}^P \neq \vec{0}$ ,  $\vec{\Omega}_{1/2}^R \neq \vec{0}$  et  $\vec{V}_{M1/2} = \vec{0}$

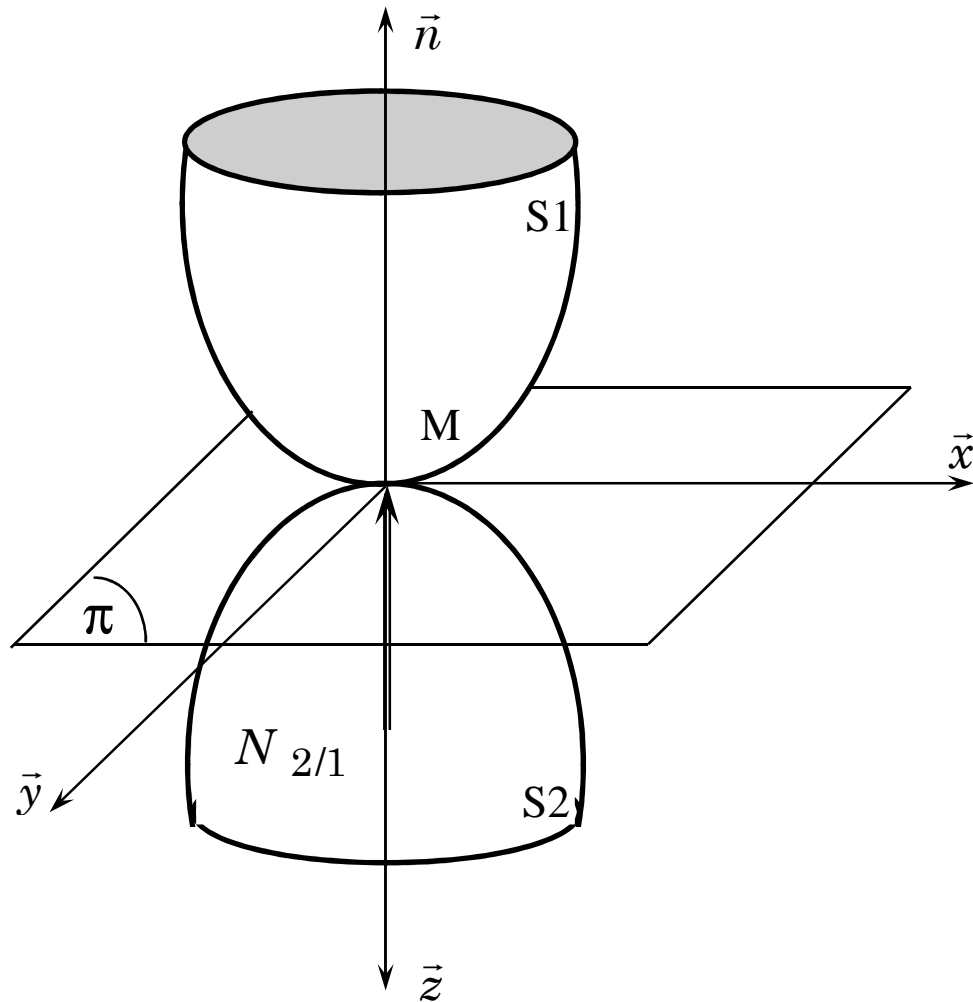
*S1 pivote et roule sans glisser  
par rapport à S2*

⌚ Si  $\vec{\Omega}_{1/2}^P = \vec{0}$ ,  $\vec{\Omega}_{1/2}^R \neq \vec{0}$  et  $\vec{V}_{M1/2} = \vec{0}$

*S1 roule sans glisser et sans pivoter  
par rapport à S2*

⌚ etc...

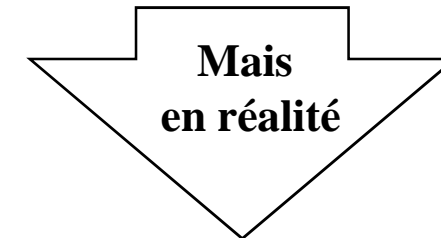
## II.2 Efforts transmis au contact de S2 sur S1



Hypothèses :

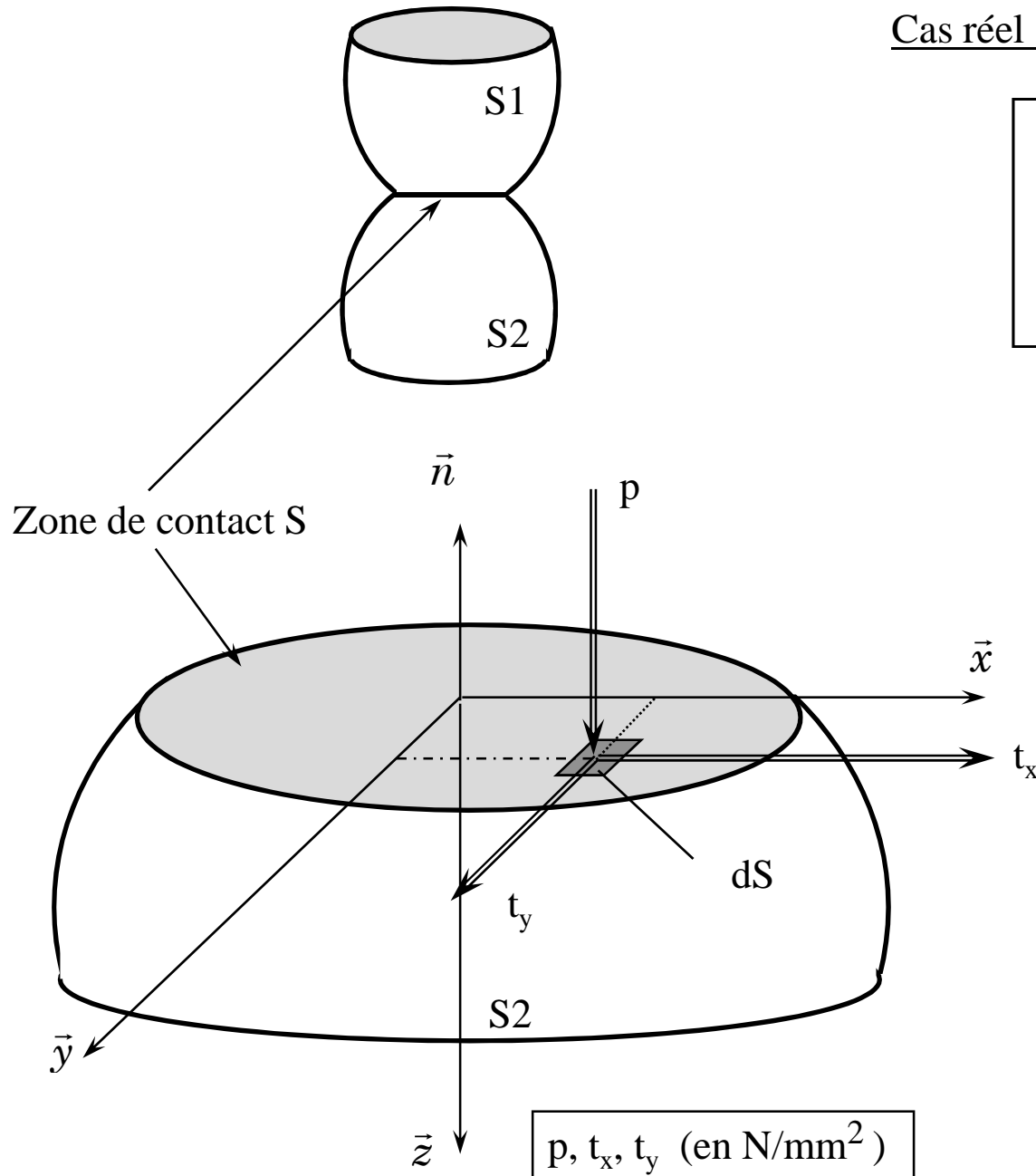
- Pas de frottement
- Solides indéformables

$$\{F_{2 \rightarrow 1}\}_{M_{xyz}} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{2/1} & 0 \end{array} \right\}_{M_{xyz}}$$



- Les solides sont déformables  
zone de contact...
- Il y a du frottement

Cas réel : frottement et solides déformables



$$\{F_{2 \rightarrow 1}\}_{M_{xyz}} : \begin{Bmatrix} T_{x2/1} & M_{x2/1} \\ T_{y2/1} & M_{y2/1} \\ N_{2/1} & M_{z2/1} \end{Bmatrix}_{M_{xyz}}$$

avec

$$T_{x2/1} = \int_S t_x dS$$

$$T_{y2/1} = \int_S t_y dS$$

$$N_{2/1} = \int_S p dS$$

$$M_{x2/1} = \int_S y p dS$$

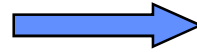
$$M_{y2/1} = \int_S x p dS$$

$$M_{z2/1} = \int_S (y t_x + x t_y) dS$$

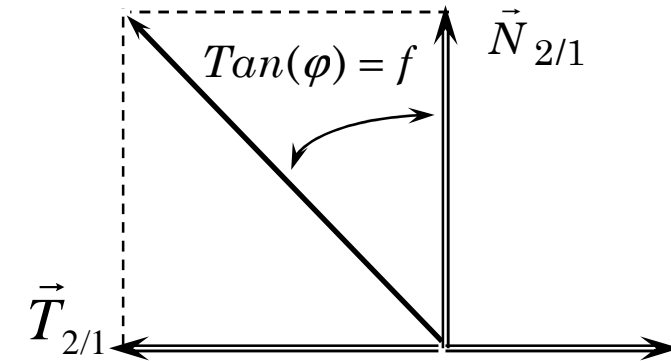
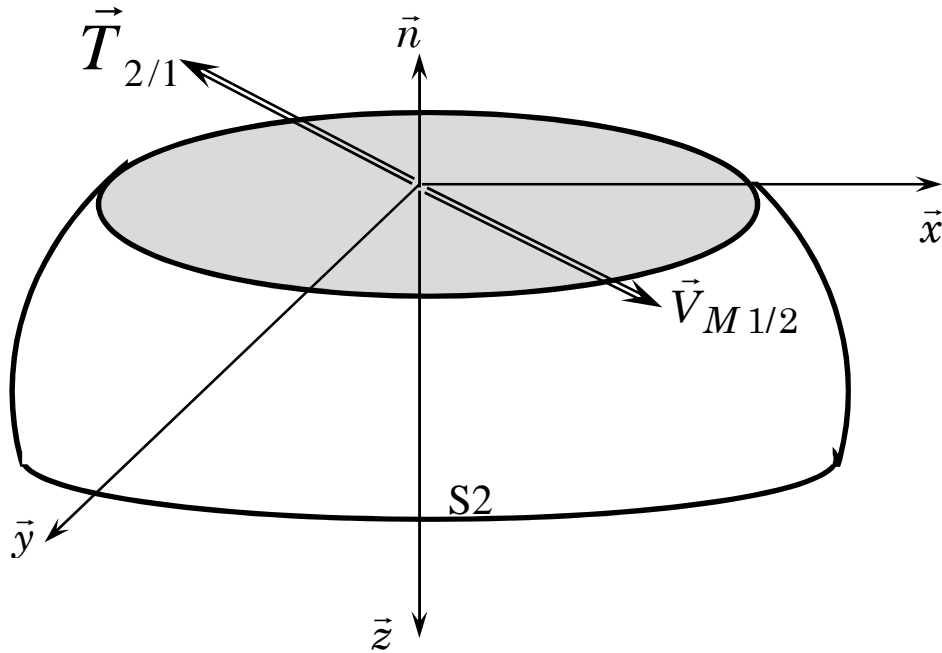


Loi de Coulomb :

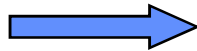
□ si **glissement**  $\vec{V}_{M1/2} \neq \vec{0}$



$$\vec{T}_{2/1} = - \frac{\vec{V}_{M1/2}}{\|\vec{V}_{M1/2}\|} f N_{2/1}$$



□ si **non glissement**  $\vec{V}_{M1/2} = \vec{0}$



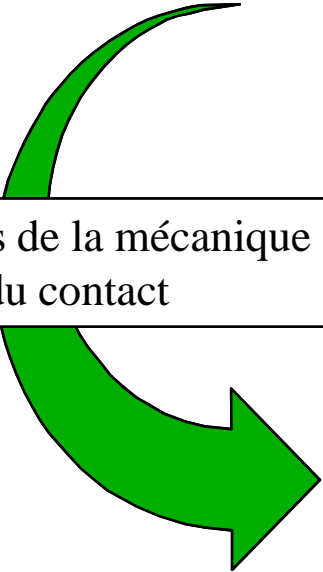
$$\|\vec{T}_{2/1}\| \leq f N_{2/1}$$

avec  $f$  coefficient de frottement entre S1 et S2  
 $f$  ne dépend que des matériaux en contact

## II.2 Conclusion :

Données :

- Deux solides S1 et S2 : **géométrie, matériaux** ( $f$ ,  $E$ ,  $\nu$ ), ...
- Des **efforts à transmettre**
- ...



Objectifs de la mécanique  
du contact

Résultats :

- Quelle est la **zone de contact** ?
- Quelle est la **répartition de pression**?  $p_{\max}$  ?
- Quel est le **rapprochement global** des deux solides?
- Quelle est la **puissance dissipée** au contact ?
- ...


### III - Éléments de la théorie de Hertz -1881

#### III.1 Hypothèses


- Solides massifs

 déformations négligeables en dehors de la zone de contact

- Déformations élastiques

 réversibles

- Pas de frottement

 pas d'effort tangentiel

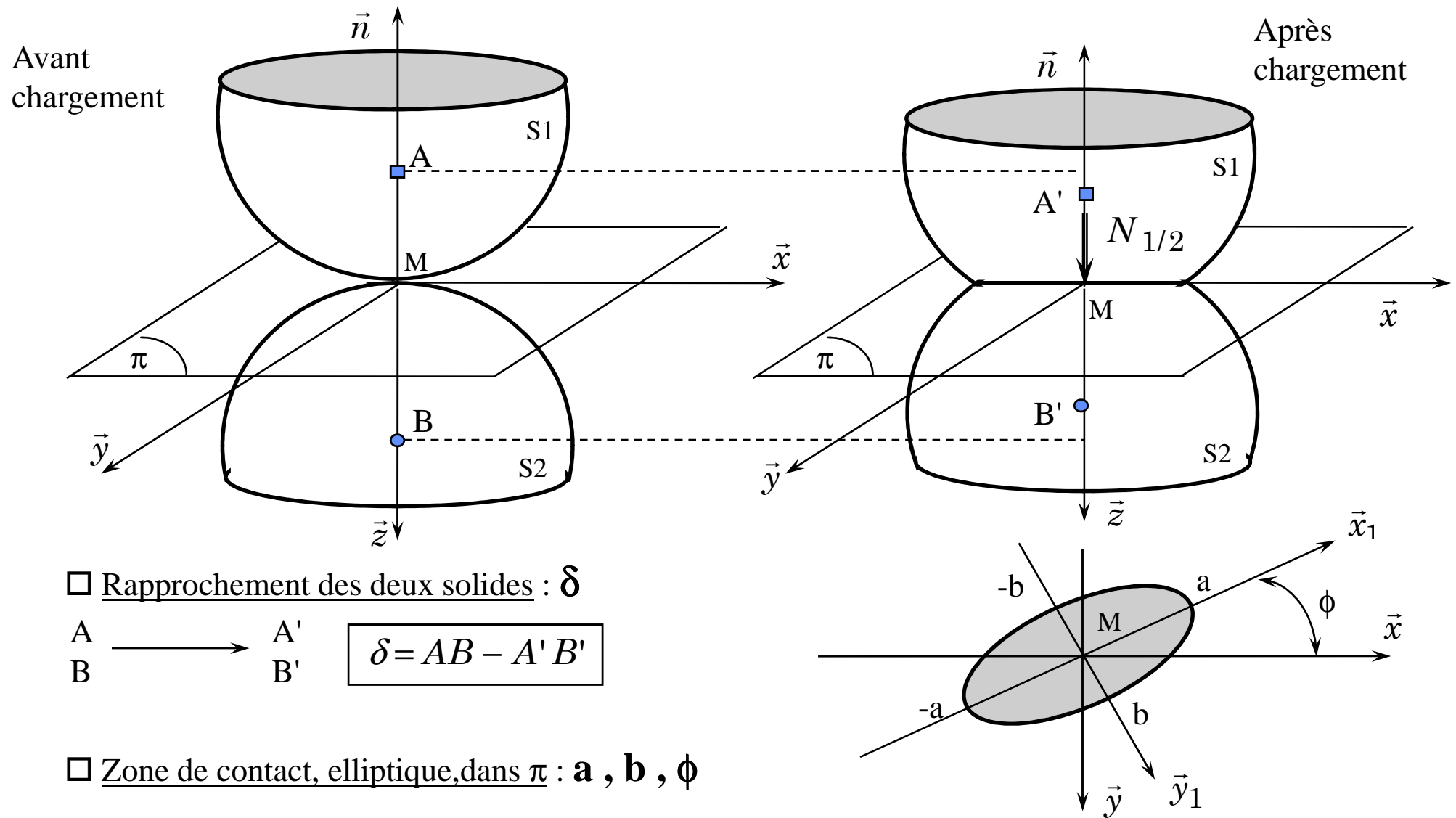
- Pas de mouvement relatif des deux solides

  $\vec{V}_{M1/2} = \vec{0}$  et  $\vec{\Omega}_{1/2} = \vec{0}$



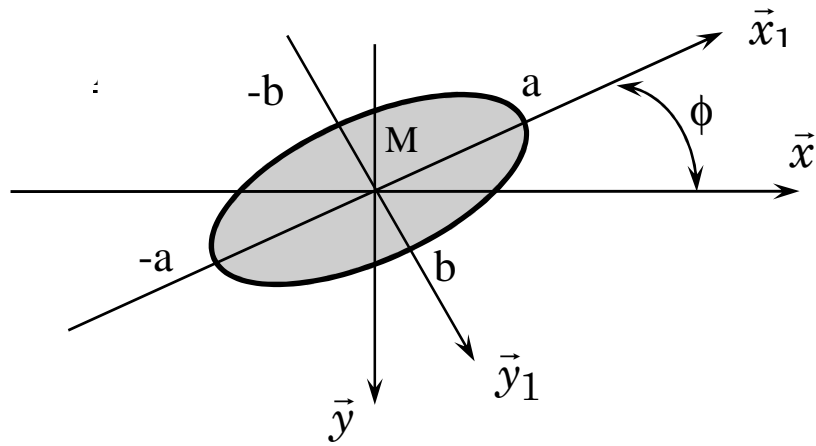
Heinrich Hertz 1857-1894

### III.2 Modélisation des déformations, zone de contact

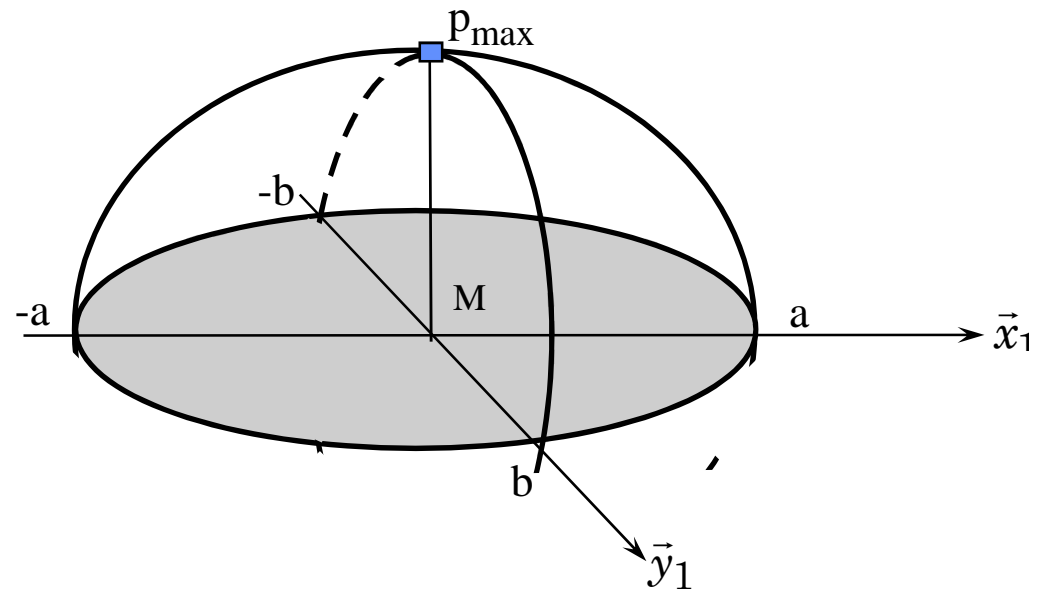


### III.3 Répartition de pression

□ Zone de contact

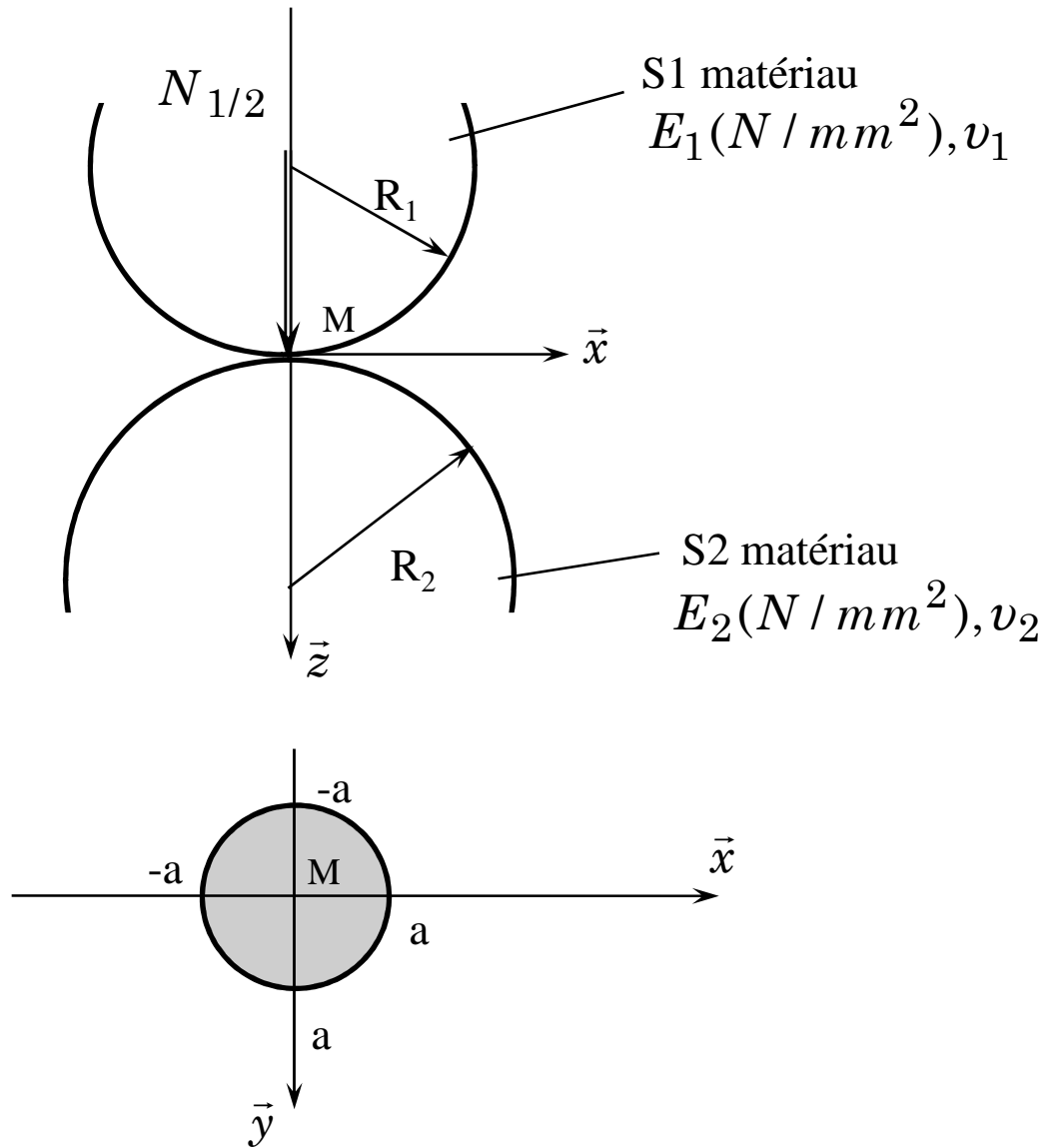


□ Répartition de pression suivant un ellipsoïde



$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{N_{1/2}}{\pi a b} = \frac{3}{2} p_{\text{moyen}}$$

### III.4 Contact sphérique ( $\phi=0$ ) : géométrie du contact, pression, dimensionnement



#### □ Géométrie du contact

$$a = \left( \frac{3}{4} \frac{R}{E^*} \right)^{1/3} (N_{1/2})^{1/3}$$

#### □ Rapprochement des deux solides

$$\delta = \left( \frac{9}{16} \frac{1}{R E^{*2}} \right)^{1/3} (N_{1/2})^{2/3}$$

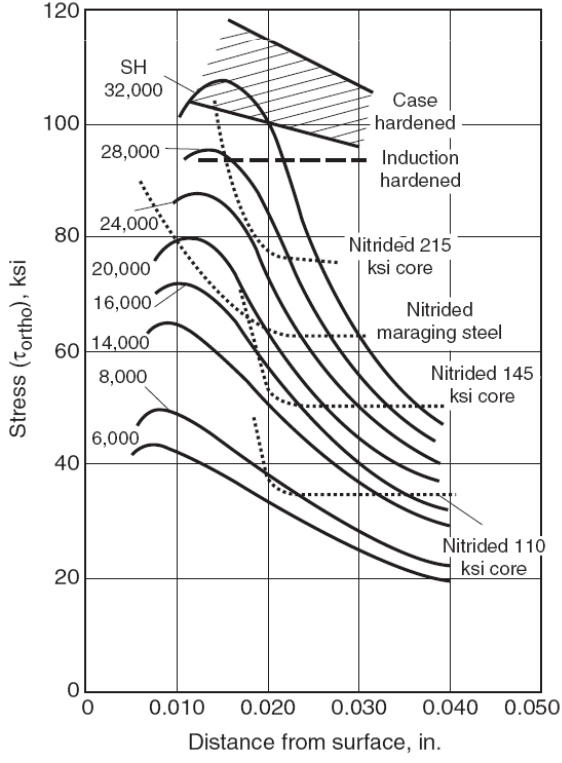
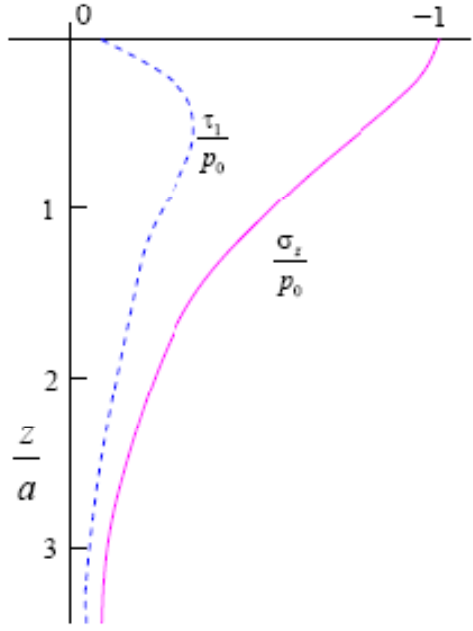
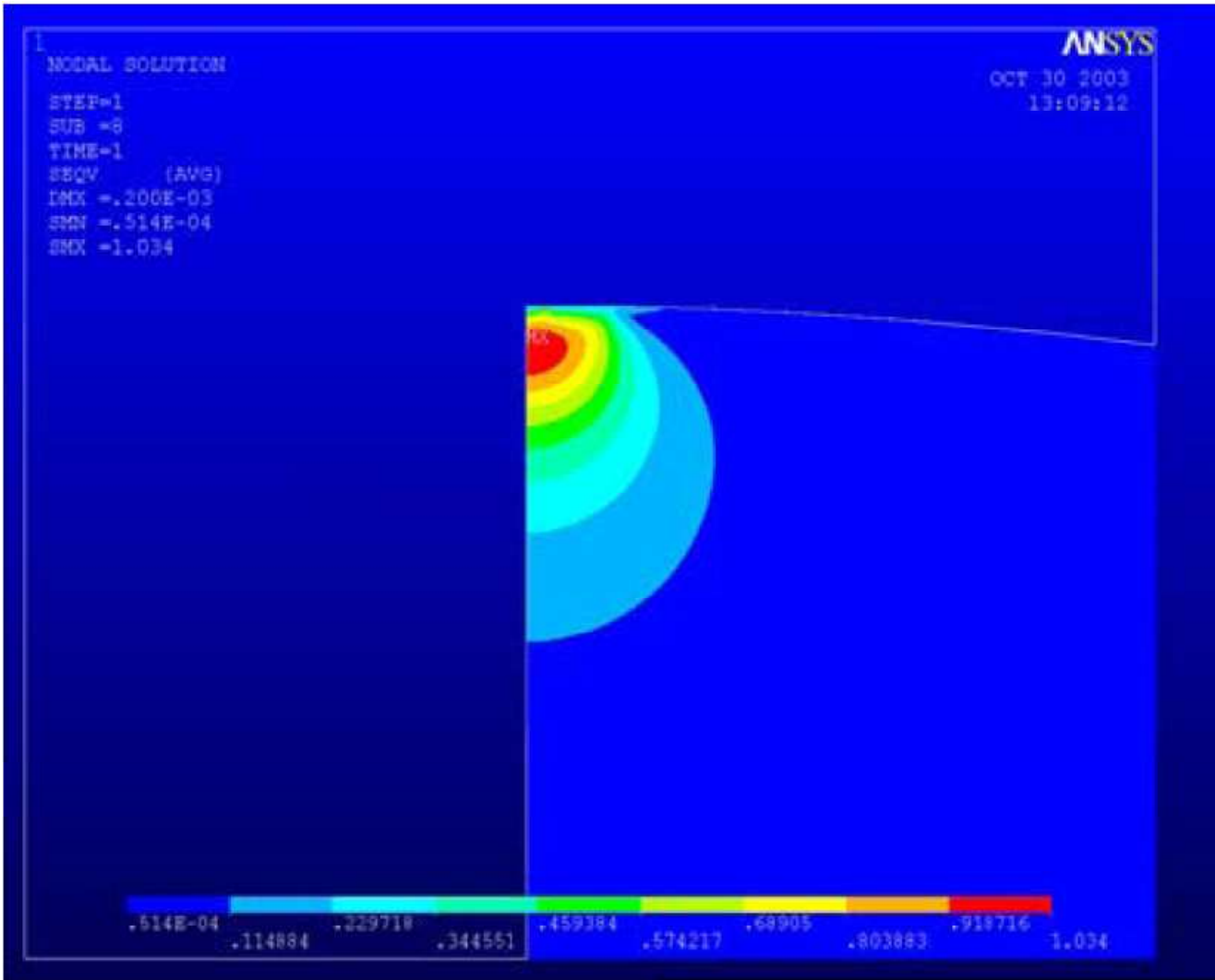
#### □ Pression maximale

$$p_{\max} = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{N_{1/2}}{\pi a^2} \right)$$

avec

$$R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$$

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$$



□ Critère de dimensionnement

$$p_{\max} < p_{adm}$$

$p_{adm}$  = Pression admissible  
par le matériau

	E N/mm <sup>2</sup>	$\nu$	$p_{adm}$ (statique) N/mm <sup>2</sup>
acier	200000	0,3	600 à 700
alu	80000	0,35	350
fonte	100000	0,3	500
bronze	130000	0,35	100
téflon	130000	0,35	10

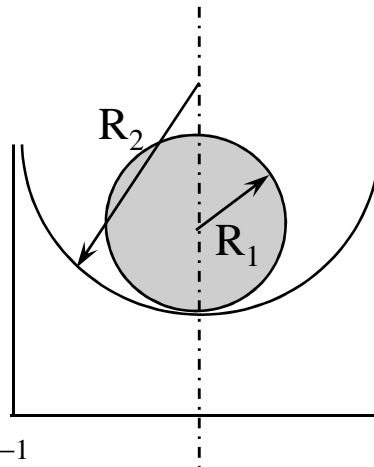
□ Remarques :

Concavité inverse

Attention au signe!

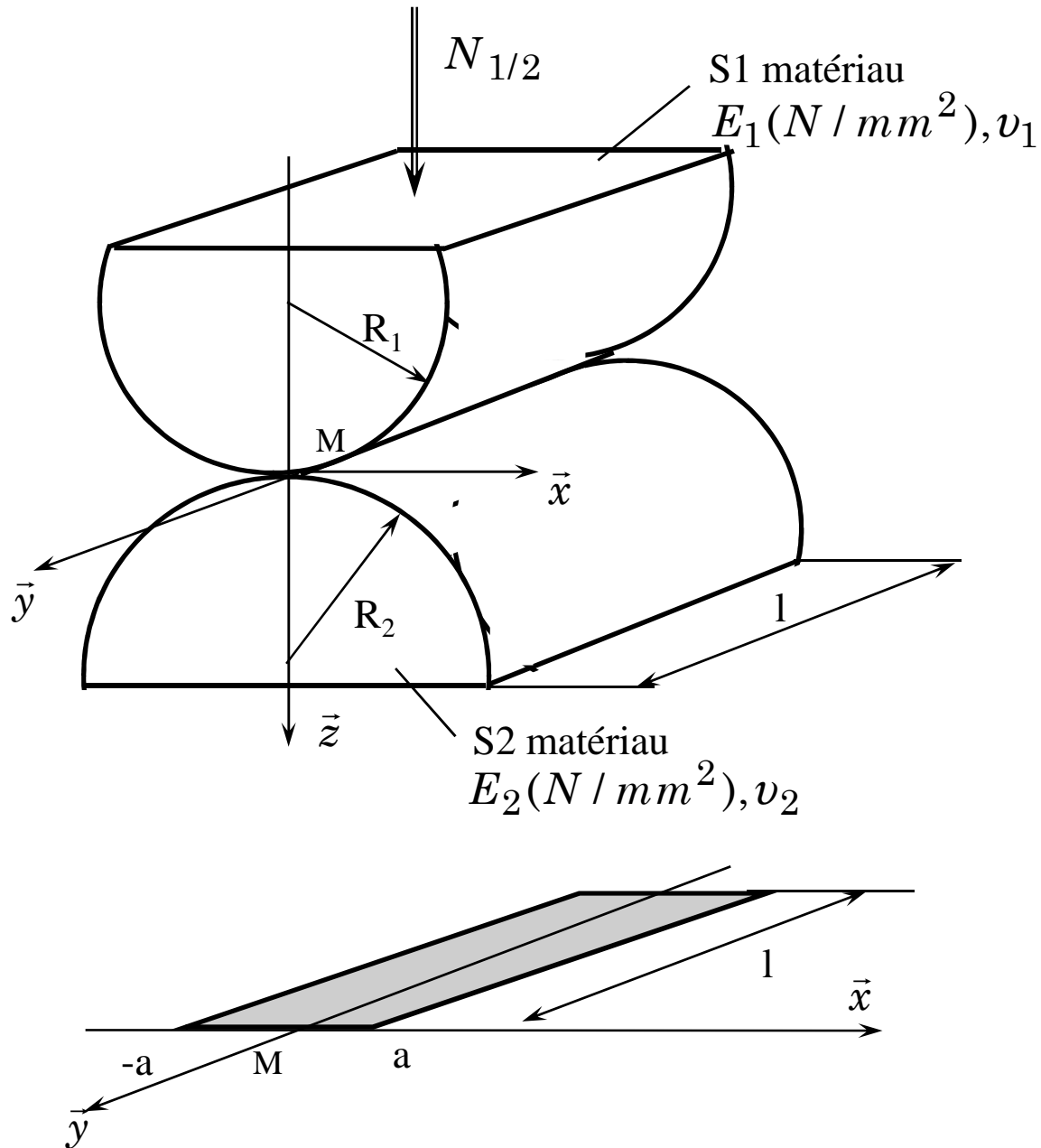


$$R = (1/R_1 - 1/R_2)^{-1}$$





### III.5 Contact linéique : géométrie du contact, pression, dimensionnement



#### □ Géométrie du contact

$$a = \left( \frac{4R}{\pi E^*} \right)^{1/2} \left( \frac{N_{1/2}}{l} \right)^{1/2}$$

#### □ Rapprochement des deux solides

??? à déterminer  
 expérimentalement

#### □ Pression maximale

$$p_{\max} = \left( \frac{2N_{1/2}}{\pi a l} \right)$$

#### □ Critère de dimensionnement

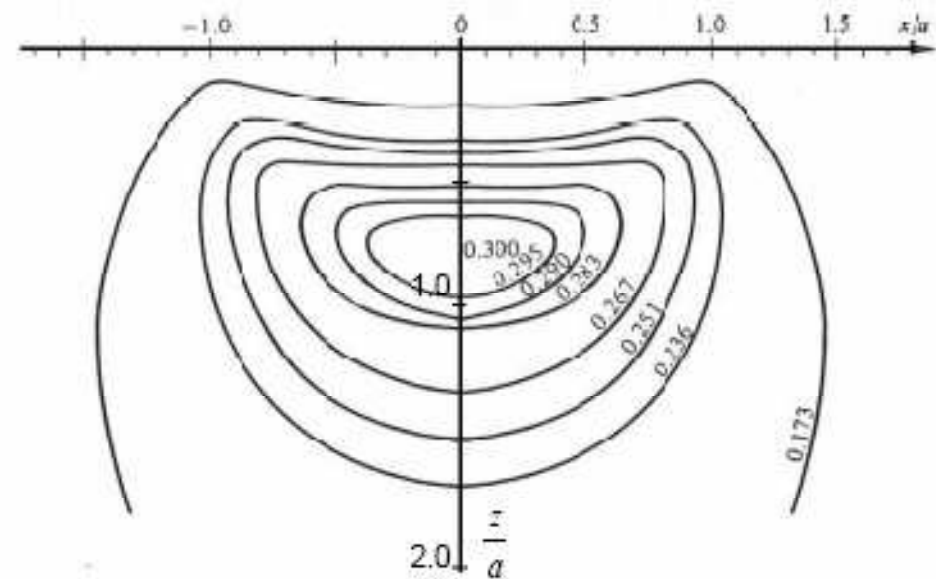
$$p_{\max} < p_{adm}$$

## ■ Contact of cylinders

Photo-elastic fringes

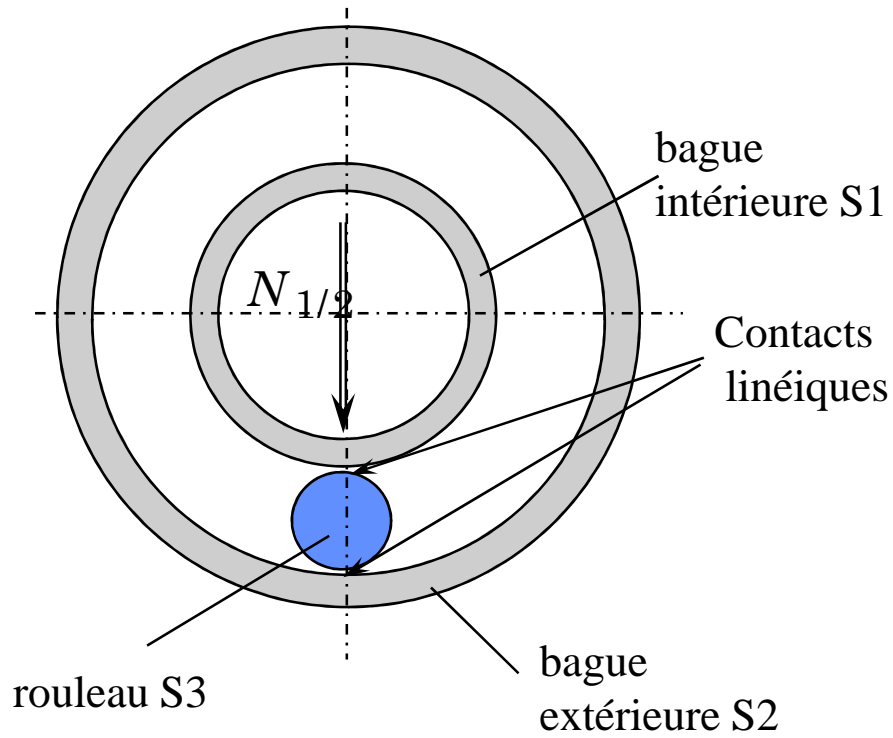


Contours of principal shear stress



□ Remarque sur le rapprochement des deux solides

Cas d'un roulement à rouleaux : un rouleau chargé



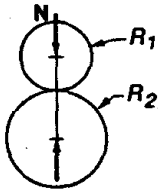
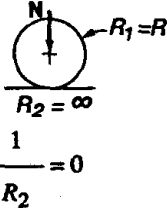
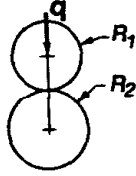
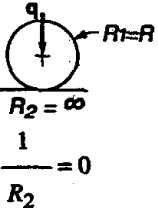
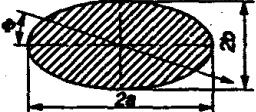
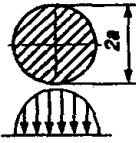
□ rapprochement des solides S1 et S2

$$\delta = K (N_{1/2})^{0,9}$$

K coefficient qui dépend de la géométrie et des matériaux

### III.6 Tableau récapitulatif des résultats de la théorie de Hertz (extrait de Systèmes mécaniques, Dunod)

$$k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$$

		Liaison ponctuelle			Liaison linéique	
Types de contact	Solides quelconques	Sphère/Sphère	Sphère/Plan	Cylindre/Cylindre	Cylindre/Plan	
		$C_1 = \frac{1}{R_1}$ $C'_1 = \frac{1}{R'_1}$ $C_2 = \frac{1}{R_2}$ $C'_2 = \frac{1}{R'_2}$ $R_1, R'_1, R_2, R'_2$ rayons de courbure principaux de 1 et 2.				
Surface de contact	Forme	Ellipse $k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$ 	Cercle 	Cercle rayon $a$	Rectangle longueur supposée $\infty$ ; largeur $2b$ ; $q$ : charge par unité de longueur.	Rectangle longueur $\infty$ ; largeur $2b$ ; $q$ : charge par unité de longueur.
contact	Dimensions	$a = m \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{k_1 + k_2}{C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2} N}$ $b = \frac{n}{m} a$ (voir tableau pour $m$ et $n$ )	$a = \sqrt{\frac{3\pi}{4} \frac{(k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2} N}$	$a = \sqrt{\frac{3\pi}{4} (k_1 + k_2) R N}$	$b = 2 \sqrt{(k_1 + k_2) q \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$	$b = 2 \sqrt{(k_1 + k_2) q R}$
Rapprochement $\delta$		$\delta = r \frac{3\pi}{4a} (k_1 + k_2) N$ (voir tableau pour $r$ )	$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16 R_1 R_2} N^2}$	$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 (k_1 + k_2)^2}{16} \frac{N^2}{R}}$	Pas de valeur par la théorie de Hertz	
$p_{\max}$		$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a b}$	$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2}$	$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2}$	$p_{\max} = 0,59 \sqrt{q \frac{E_1 E_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 (E_1 + E_2)}}$  si $\nu = 0,3$ $p_{\max} = \frac{2q}{\pi b}$  $p_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{q}{k_1 + k_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$	$p_{\max} = 0,59 \sqrt{\frac{q}{R} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}$  $p_{\max} = \frac{2q}{\pi b}$  $p_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{q}{k_1 + k_2} \frac{1}{R}}$
Profondeur pour $\tau_{\max}$ $IC = h$		Fonction de l'excentricité de l'ellipse (voir graphique figure 2.28) (pour $\nu = 0,3$ )	$IC = h$ $h = 0,5 a$ (pour $\nu = 0,3$ )	$IC = h = 0,5 a$ (pour $\nu = 0,3$ )	$IC = h = \frac{\pi b}{4}$ $h = 0,78 b$ (pour $\nu = 0,3$ )	$h = 0,78 b$

### III.7 Quelques applications

#### **Problème 1 :**

On souhaite comparer 4 contacts ponctuels différents

- a) contact entre deux sphères de rayon  $R$
- b) contact entre une sphère de rayon  $R$  et un plan
- c) contact entre une sphère de rayon  $R$  et une surface sphérique concave de rayon  $4R$
- d) contact entre une sphère de rayon  $R$  et une surface sphérique concave de rayon  $4/3 R$

Les deux solides sont en acier, l'effort presseur est de 1000 N et le rayon  $R$  a pour valeur 25 mm.

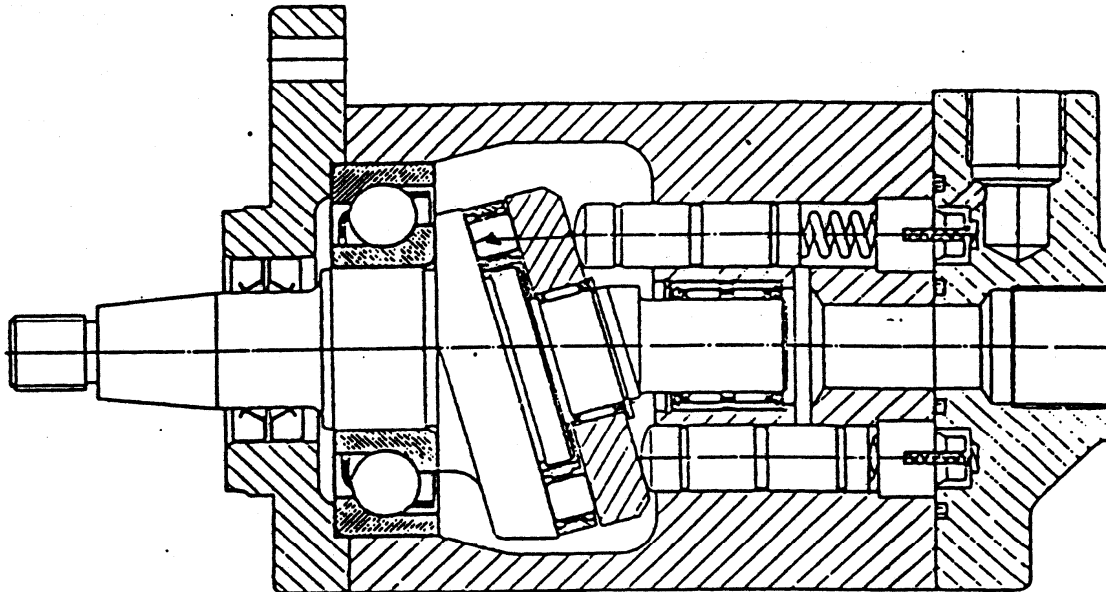
Quel rapport existe-t-il entre les valeurs des différentes pressions maximum au niveau du contact?

## Problème 2 :

On considère une pompe hydraulique

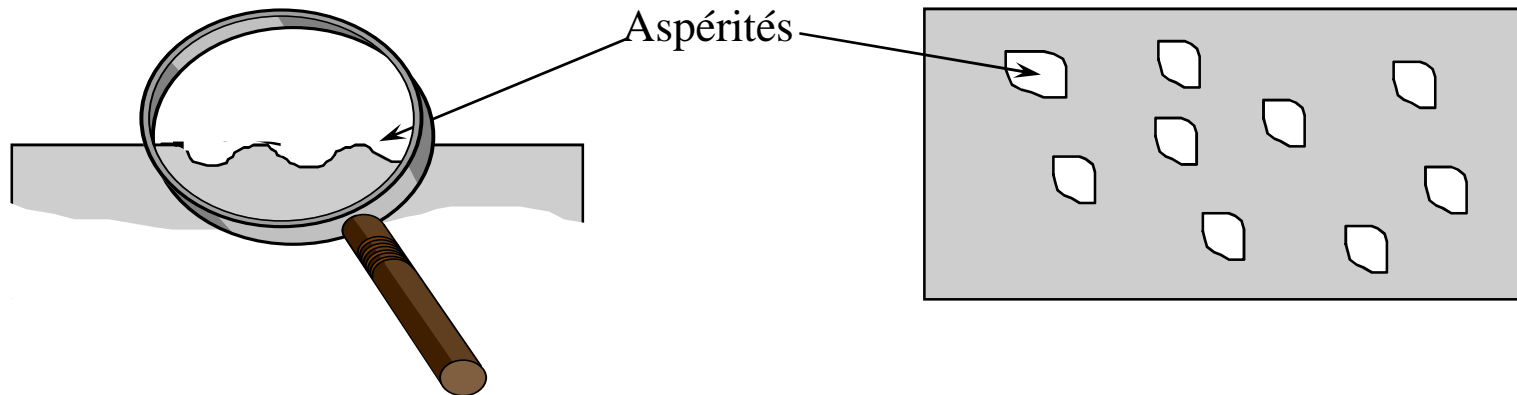
- Effectuer le schéma cinématique minimal de l'appareil
- Déterminer en fonction de la pression de refoulement  $P$  et de l'angle d'inclinaison  $\gamma$  du plateau, l'expression de l'effort au contact du piston et du plateau
- Calculer la pression maximale au contact. Est-elle admissible ?

Données :  $P=100$  bar, rayon du piston  $r = 5$  mm, rayon de la partie sphérique au contact  $R=17,5$  mm, les matériaux en contact sont en acier ( $E=200000$  MPa et  $\nu=0,3$ ), inclinaison du plateau  $\gamma = 18^\circ$



#### IV - Contact surfacique : Modélisation de la répartition de pression?

Surface de contact?



**Quelle est la surface réelle de contact ?**

La surface réelle est différente de la surface théorique

Quelle répartition de pression ?

exemple : Articulation, clavette, frein...

**QUEL MODELE CHOISIR ?**

a. Pression uniforme

$$p(M) = p_0 = \text{constante}$$

b. Pression fonction de la déformation

$$p(M) = K \delta(M)^\alpha$$

Critère à respecter

$$p_{\max} \leq p_{\text{matage}}$$

Pression conventionnelle de matage

## Pressions conventionnelles de matage utilisées couramment en bureau d'études:

### a) Pression de matage pour les clavettes parallèles

Conditions de fonctionnement (clavette en A 60)	Pression (MPa)
Assemblage fixe	30 à 115
Déplacement sans charge	12 à 40
Déplacement sous charge	3 à 15

### b) Pression de matage pour les cannelures

Conditions de fonctionnement	Pression (MPa)
Sans mouvement relatif – sans choc – avec choc	100 à 200 30 à 100
Avec mouvement relatif sans charge – sans choc – avec choc	50 à 100 20 à 60
Avec mouvement relatif sous charge – sans choc – avec choc	10 à 30 3 à 15

### c) Pression de matage pour les vis-écrous (système de transformation de mouvement)

Matériaux en présence	Pression (MPa) (en charge dynamique)
Acier sur fonte grise	2 à 5
Acier sur bronze – utilisation courante – pour les machines-outils	5 à 10 0,5 à 2
Acier cémenté trempé sur bronze	10 à 20

### d) Pression de matage pour les galets sur rail • (ponts roulants ou chariots)

Matériaux en présence	Pression (MPa) (en charge dynamique)
Acier sur fonte grise	2 à 3
Acier sur acier	4 à 8

### e) Pression de matage pour embrayages et freins

Matières	Pression (MPa)	Température (°C)	
		En continu	Ponctuellement
Acier traité / Acier traité	0,5 à 4	100	200
Acier traité / métal fritté – Fer % ≥ 40 % – Bronze – Céramique	2 à 6 3 à 6 2 à 8	150 300 500	300 600 800
Fonte grise / Fonte grise	1 à 2	150	250
Acier ou fonte / – Résine synthétique – Toile amiante – Graphite	0,2 à 0,5 0,1 à 2,5 0,1 à 2	50 120 200	90 350 450